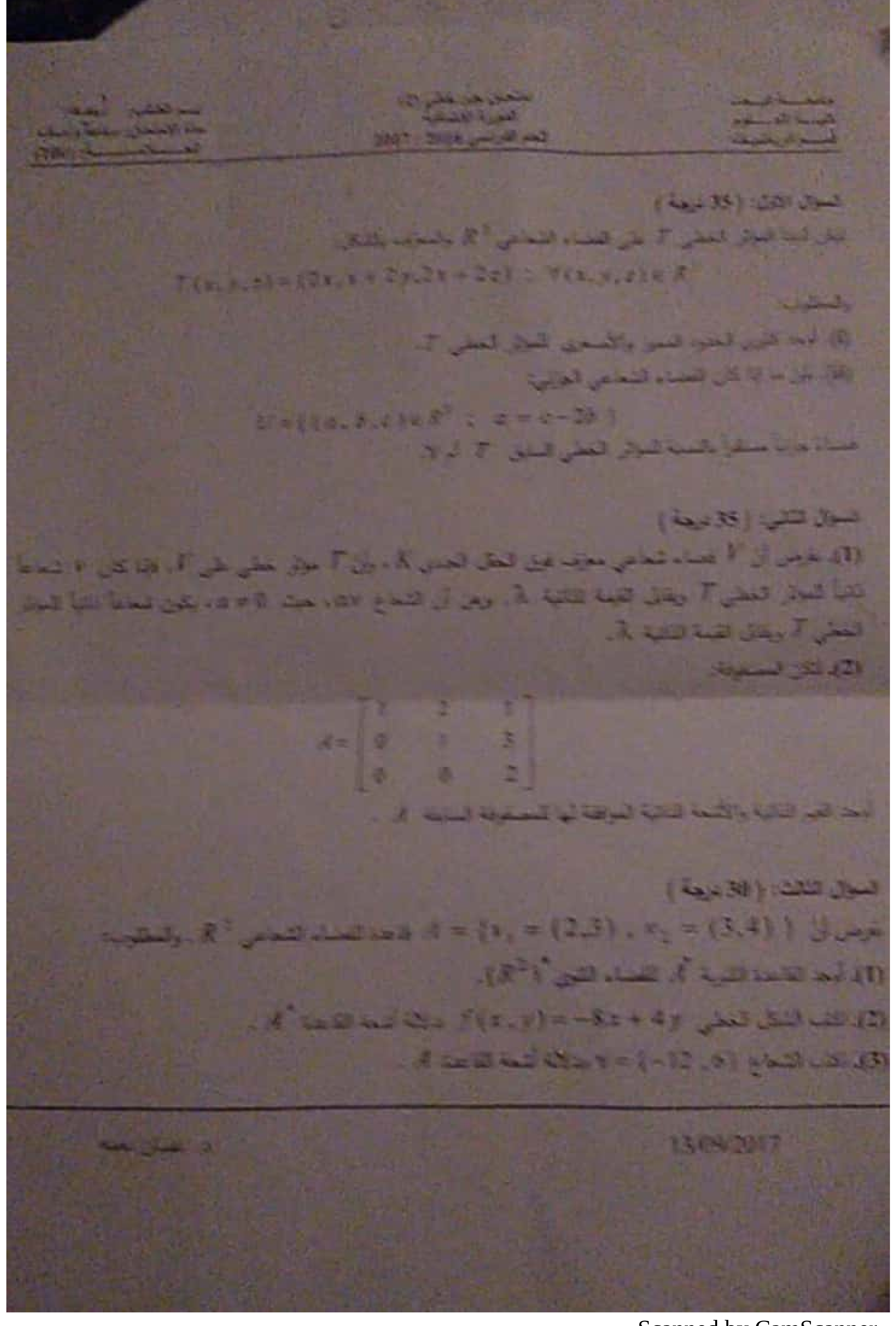



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان جبر خطي (2)
[illegible]
العام الدراسي 2016 - 2017

[illegible]
مدة الامتحان: ساعة ونصف
العلامة العظمى: (100)


**السؤال الأول: (35 درجة)**

ليكن لدينا المؤثر الخطي $T$ على الفضاء المتجهي $R^3$ والمعرف بالشكل:

$$T(x,y,z)=(2x,\ x+2y,\ 2x+2z)\ ;\ \forall (x,y,z)\in R^3$$

والمطلوب:

(1) أوجد كثير الحدود المميز والأصغري للمؤثر الخطي $T$.

(2) بيّن ما إذا كان الفضاء المتجهي الجزئي

$$W=\{(a,b,c)\in R^3\ ;\ a=c-2b\}$$

فضاءً جزئياً مستقراً بالنسبة للمؤثر الخطي السابق $T$ أم لا.

**السؤال الثاني: (35 درجة)**

(1) نفرض أن $V$ فضاء متجهي معرف على الحقل العددي $K$، وأن $T$ مؤثر خطي على $V$. إذا كان $v$ شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي $T$ ويقابل القيمة الذاتية $\lambda$، برهن أن الشعاع $\alpha v$، حيث $\alpha\neq 0$، يكون شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي $T$ ويقابل القيمة الذاتية $\lambda$.

(2) لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية الموافقة لها للمصفوفة السابقة $A$.

**السؤال الثالث: (30 درجة)**

نفرض أن $S=\{v_1=(2,3)\ ,\ v_2=(3,4)\}$ قاعدة للفضاء المتجهي $R^2$، والمطلوب:

(1) أوجد القاعدة الثنوية $S^*$ للفضاء الثنوي $(R^2)^*$.

(2) اكتب الشكل الخطي $f(x,y)=-8x+4y$ بدلالة أشعة القاعدة $S^*$.

(3) اكتب الشعاع $v=(-12\ ,\ 6)$ بدلالة أشعة القاعدة $S$.

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان
جبر خطي(2)
الدورة الإضافية 2017/2016

اسم الطالب:
مدة الامتحان: ساعتان
العلامة: (100)

---

**السؤال الأول: (35 درجة)**

**(i).** لنوجد أولاً مصفوفة هذا المؤثر الخطي، وعندها يكون كثيرا الحدود المميز والأصغري للمؤثر الخطي $T$ هما كثيرا الحدود المميز والأصغري لمصفوفة هذا المؤثر.

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0)=(2,1,2) \\ T(0,1,0)=(0,2,0) \\ T(0,0,1)=(0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ (6)

إن كثير الحدود المميز لمصفوفة المؤثر الخطي السابقة $A$ هو:

$$\varphi(x)=|xE-A|=(x-2)^3$$ (6)

أما كثير الحدود الأصغري للمصفوفة $A$ فهو أحد الكثيرات الحدود التالي:

$$f_1(x)=(x-2)\ ,\ f_2(x)=(x-2)^2\ ,\ f_3(x)=(x-2)^3$$

$$f_1(A)=(A-2E)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq 0$$ (2)

$$f_2(A)=(A-2E)^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2=0$$ (2)

ما يعني أن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة $A$ هو:

$$m(x)=(x-2)^2$$ (3)

وهو بنفس الوقت كثير الحدود الأصغري للمؤثر الخطي المعطى $T$.

**(ii).** من أجل شعاع اختياري $u=(a,b,c)$ من الفضاء الشعاعي الجزئي $U$ نجد أن:

$$\begin{aligned} T(a,b,c) &= (2a,a+2b,2c+2a) \\ &= (2a,a+2b,2(a+2b)+2a) \\ &= (2a,a+2b,4a+4b) \end{aligned}$$ (7)

ولأن المركبة الثالثة من $T(a,b,c)$ تساوي المركبة الأولى مضافاً إليها مثلي المركبة الثانية فإن $T(a,b,c)\in U$، وبالتالي فالفضاء الجزئي $U$ هو فضاء جزئي مستقر بالنسبة للمؤثر الخطي المعطى $T$. (6)



Scanned by CamScanner

السؤال الثاني: ( 35 درجة )

(1). بما أن $v$ شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي $T$ ويقابل القيمة الذاتية $\lambda$ فيكون:

$$T(v)=\lambda v$$

ويكون أيضاً :

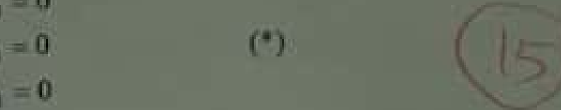
$$T(\alpha v)=\alpha T(v)=\alpha(\lambda v)=\lambda(\alpha v)$$

ولأن $\alpha v\neq 0$ ، كون $\alpha\neq 0$ و $v\neq 0$ نستنتج من العلاقة السابقة أن الشعاع $\alpha v$ يكون شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي $T$ ويقابل القيمة الذاتية $\lambda$.

(2). بفرض أن $P=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\neq 0$ شعاع ذاتي للمصفوفة $A$ ويقابل القيمة الذاتية $\lambda$ ، فيكون:

$$A.P=\lambda P \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=\lambda x_1\\ x_2+3x_3=\lambda x_2\\ 2x_3=\lambda x_3\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2+x_3=0\\ (1-\lambda)x_2+3x_3=0\\ (2-\lambda)x_3=0\end{cases} \qquad (*)$$



ويكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة السابقة حلاً غير الحل الصفري عندما يكون معين الأمثال صفراً أي :

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

وتكون القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي $\lambda_{1,2}=1\ ,\ \lambda_3=2$ .



لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda_{1,2}=1$ نعوض في $(*)$ فنجد :

$$0.x_1+2x_2+x_3=0$$
$$0x_2+3x_3=0$$
$$x_3=0$$



بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نحصل على الشعاع الذاتي الوحيد الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_{1,2}=1$ وهو:

$$P_1=(1\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda_3=2$ نعوض في $(*)$، وبالحل المشترك لجملة المعادلات الخطية الناتجة نجد أن الشعاع الذاتي الوحيد الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_3=2$ هو $P_2=(7\ ,\ 3\ ,\ 1)$.



Scanned by CamScanner

السؤال الثالث: ( 30 درجة )

(1). بفرض أن القاعدة الثنوية $A^*$ للقاعدة $A = \{v_1 = (2,3)\ ,\ v_2 = (3,4)\ \}$ هي:

$$A^* = \{ f_1(x,y) = a_1x + b_1y\ \ ,\ \ f_2(x,y) = a_2x + b_2y\ \ ;\ \ \forall x,y \in R \}$$

فيكون من أجل إيجاد $f_1$ :

$$f_1(v_1) = 2a_1 + 3b_1 = 1$$
$$f_1(v_2) = 3a_1 + 4b_1 = 0$$

بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$f_1(x,y) = -4x + 3y$$

ومن أجل إيجاد $f_2$ :

$$f_2(v_1) = 2a_2 + 3b_2 = 0$$
$$f_2(v_2) = 3a_2 + 4b_2 = 1$$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$f_2(x,y) = 3x - 3y$$

وبالتالي تكون القاعدة الثنوية $A^*$ للقاعدة $A = \{v_1 = (2,3)\ ,\ v_2 = (3,4)\ \}$ هي:

$$A^* = \{ f_1(x,y) = -4x + 3y\ \ ,\ \ f_2(x,y) = 3x - 2y\ \ ;\ \ \forall x,y \in R \}$$

(2). كتابة الشكل الخطي $f(x,y) = -8x + 4y$ بدلالة أشعة القاعدة $A^*$ :

$$f(x,y) = f(v_1).f_1 + f(v_2).f_2$$
$$= (-16 + 12)f_1 + (-24 + 16)f_2$$
$$= -4f_1 - 8f_2$$

(3). كتابة الشعاع $v = (-12\ ,6)$ بدلالة أشعة القاعدة $A$ .

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2$$
$$= f_1(-12,6)v_1 + f_2(-12,6)v_2$$
$$= (48 + 18)v_1 + (-36 - 12)v_2$$
$$= 66\,v_1 - 48\,v_2$$

د. غسان نعمه


Scanned by CamScanner